FlowのStability (位相幾何学と経済学)

岡部, 恒治

数理解析研究所講究録
407巻 1980年 64-72

flow の stability

埼玉大 教養　岡部恒治

一般均衡解の存在性と一意性についての研究に於いて，stabilityが重要な意味をもっていることは西村氏の講演の中で明らかにされた。（例えば[1]を参照）ここでは，そのstabilityについて，もう一度ふり返る.（経済学の人への用語の解説の意もある。）

1. flow と tangent space

$\phi : R \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ を考える。但し，

$$\begin{cases} \phi_0 = id : M \longrightarrow M \\ \phi_t \phi_s = \phi_{t+s} \end{cases}$$

ϕ_t は tangent vector field on M を(次のように)きめる。

$$X : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x M \\ \Psi & & \\ x & \longmapsto & X(x) \in T_x(M) \end{array}$$

$$\text{但し}\quad X(x) = d\phi_t(x)/dt\,\big|_{t=0} \qquad (*)$$

ϕ の orbit through x とは $t \longmapsto \phi_t(x)$ によって，写される. M 上の曲線であり，これは(*)の微分方程式の解に対応する。

逆に微分方程式が与えられたとき，(*)の形にもってゆけ

る。こうして，解の存在定理によって，flow と tangent vector field は同じものと考えられる。（但し，non compact な場合には，少し scalar function で変形する。）

2。 flow の orbits

orbit の形は次の3つの形にわけるのが普通である。

(イ) fixed point x ($x \in Fix(\varphi_t)$ と書く)

$$\varphi_t(x) = x \quad {}^\forall t \in \mathbb{R} \iff X(x) = \vec{0}$$

(ロ) closed orbit

$${}^\exists x_0 \in M, \ {}^\exists t_0 > 0; \quad \varphi_{t_0}(x_0) = x_0$$

さらに(イ)と区別するために，こういう(t_0の最小値) > 0 があるとする。これを period という。

(ハ) ordinary orbit

(イ)，(ロ) 以外

3。 structurally stable etc.

以後 M を compact とする。$\mathcal{X}(M)$ を M 上の C^r-vector field で，C^r-norm の入っているものとする。

(Def) flow の generic property とは，$\mathcal{X}(M)$ の Baire set で成り立つ property のこと。

(例) $\#\{x ; X(x) = \vec{0}\} < \infty$ は generic prop.

(Def) $\varphi_t, \psi_t : M \longrightarrow M$ が topologically equivalent とは，

$\exists h : M \longrightarrow M$ homeo

s.t. hはϕ_tのorbitをψ_tのorbitに写す。

このとき，$\phi_t \overset{t.e.}{\sim} \psi_t$ と書く。

(Def) $\mathcal{X}(M) \ni X$ が structurally stable

$\Rightarrow \mathcal{X}(M) \supset {}^{\exists}U_{nbd.} \ni X$ s.t. $U \ni {}^{\forall}Y$ について，$X \overset{t.e.}{\sim} Y$

(例) compact 2-dim mfds 上では，structurally stable flow は dense open sub-set。しかし，3-dim 以上では，そうならぬ mfds がある。

(Def) $x \in M$ が wandering pt. for ϕ_t

$\Leftrightarrow$ $x \in {}^{\exists}U_{nb.d.} \subset M$, $\exists t_0 > 0$

s.t. $\left(\bigcup_{|t| > t_0} \phi_t(U) \right) \cap U = \phi$

(即ち xのまわりの近傍を十分小さく取れば，その近傍を一定以上動かせば，元の近傍とは決して交わらない，戻って来ないという訳である。)

$x \in M$ が non wandering pt.

$\Leftrightarrow$ x が wandering でない。

(記号) $\Omega(\phi_t) = \{ \phi_t$ の non wandering pt 全体$\}$

これは closed で invariant である。

(Def) $\phi_t \overset{t.e.\Omega}{\sim} \psi_t$ (topological equivalent on Ω)

$\Leftrightarrow \exists h : \Omega(\phi_t) \longrightarrow \Omega(\psi_t)$ homeo. orbit preserve.

(Def) Φ_t が Ω-stable とは，Ωに制限すると，structurally stable.

4. cross section と suspension

(Def) Φ_t に対して，Mの codim 1 submfd Σ が cross section であるとは，すべての orbit が Σ と transversal に intersect するとき，

Φ_t に対して，$\underbrace{f : \Sigma \longrightarrow \Sigma}_{\text{ほとんどの点で}}$ がきまる．（最初に戻って来た点を対応させる．）これを Poincare map といい，$f = P(\Phi_t)$ とかく．ここで fの periodic point $\longleftrightarrow$ Φの closed orbit

逆に，$f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ diffeo が与えられたとき，$M = \Sigma \times I/\sim$ 上に flow が作れる．これを suspension といい $\Sigma(f)$ と書く．

(性質) suspension と cross-section は逆の対応である。

5 hyperbolicity

(Def) $\phi_t : M \longrightarrow M$ が与えられたとき，$x \in Fix(\phi_t)$ が hyperbolic $\Leftrightarrow$ $\phi_1 : M \longrightarrow M$ が hyperbolic

すなわち，$D\phi_t(x) : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ について，

$D\phi_t(x) = e^{tA}$ としたとき，Aの固有値の real part が 0 とならない。

(性質) $x \in Fix(\phi_t)$ が hyperbolic なら，$W^s(x)$ (ϕ_1 についての) は invariant, contract, for $^\forall t > 0$

(写像が与えられたとき，その写像によってちぢむ方向の部分空間を $W^s(x)$ と書く。上の性質は ϕ_1 でのちぢむ方向が ϕ_t によってちぢんでゆく方向と一致することを示している。)

(Def) この $W^s(x)$ を ϕ_t についての x の stable mfd という。

(Def) γ が closed orbit for ϕ_t，$x \in \gamma$ とする。
γ が hyperbolic closed orbit $\Leftrightarrow$ Poincaré map について，x が hyperbolic fixed pt.

$W^s(\gamma)$ も $W^s(x)$ と同じように定義できる。(S^1 上の R^{m-1} bundle であるから)，$W^u(x)$, $W^u(\gamma)$ については，ϕ_{-t} を考えればよい。

6. Morse Smale flow

(Def) 次の条件をもつ flow を Morse Smale flow という。

(1) $\Omega(\phi_t)$ は有限個の fixed point と有限個の closed orbit の和.

(2) (1) のすべては hyperbolic

(3) (1) の W^s と W^u はお互いに transversally にしか交わらない。(交点で，$T_x(W^s)$ と $T_x(W^u)$ が $T_x(M)$ を span する。)

(Th) (Peixoto) $\dim M = 2$ のとき，
φ_t が structurally stable
$\Leftrightarrow$ φ_t が Morse Smale

(Th) (Smale) [3]
Morse Smale flow の中に，open dense に gradient flow が含まれている。

gradient flow とは $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して，
$X(x) = (\operatorname{grad} f)(x)$ と定義したものである。
gradient flow 以外の Morse Smale flow は，Reizinš が作っている。

IV. Anosov flow.

M に Riemann metric を入れておく．
$\phi_t : M \longrightarrow M$ に対して，
$\psi_t : D\phi_t : T(M) \longrightarrow T(M)$ を考えることが出

きる。

(Def) $T(M) = E^u + E^s + E^0$ と分解できて,

$\psi_t | E^u$ は expanding ($\|\psi_t(v)\| \leqq Ce^{-\lambda t}$, $\forall v \in E^u$, $\forall t<0$)

$\psi_t | E^s$ は contracting ($\|\psi_t(v)\| \leqq Ce^{-\lambda t}$, $\forall v \in E^s$, $\forall t>0$)

E^0 は 1-dim で orbit の方向に対応

このとき [illegible]sov flow という。

(例) $f: M \longrightarrow M$ Anosov diffeo

$\Rightarrow \Sigma(f)$ は Anosov flow

(Th) Anosov [5] $\varphi_t : M \longrightarrow M$ Anosov flow

$\Rightarrow \varphi_t$ は structurally stable

§ 再び Hyperbolicity

Hyperbolicity の criteria は次の Hirsch-Pugh [6] にある。

(Th) $M \supset V \xrightarrow{g} M$ $V \supset X$ invariant g & g^{-1}

$E_1 \oplus E_2$ splitting of $T_x M$

$T_x g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2$

$\exists\, 0 < \tau < 1$, $\exists\, \varepsilon > 0$, かつ $\max\{\|A^{-1}\|, \|D\|\} < \tau + \varepsilon$

$\max\{\|B\|, \|D\|\} < \varepsilon$

$\Rightarrow X$ は hyperbolic

9 線型の場合.

$\frac{dx}{dt} = Ax$ なる微分方程式は Kuiper [7] に

次の結果がある。

(Th) $\frac{dx}{dt} = A'x$, $\frac{dx}{dt} = Ax$ の flow が top. equiv.

である。$\Leftrightarrow \begin{cases} A'_0 \text{ と } A_0 \text{ が lin equiv} \\ \dim A^u = \dim A'^u, \ \dim A^s = \dim A'^s \end{cases}$

但し, A_0 は A を eigenvalue の real part 0 の eigen space に制限したもの。

A_+, A_- はそれぞれ, real part 正, 負の eigen space に制限したものである。

また lin equiv. とは B なる non-singular matrix について,

$\frac{dy}{ds} = cB^{-1}ABy$ となるとき, (c は定数)

$cB^{-1}AB = C$ と書き, C と A とは lin equiv という。

— References —

[1] : 西村：『微分トポロジーと経済学』 本講究録

[2] Smale 『Differentiable Dynamical Systems』
Bulletin 1967

[3] Smale 『Morse inequalities for dyn. sys.』
Bull. Amer. 66 (1960)

[4] Peixoto 『structurally stability on 2-mfd』
Topology 1.

[5] Anosov 『Geodesic flows on compact Riem. mfd.』
Trudy Mat. Inst. Steklov

[6] Hirsch-Pugh 『Hyperbolicity —』
A.M.S. Proc. of Symposia in Pure Math. 14

[7] Kuiper
Topology conference in Tokyo